

SOLUCIÓN PRUEBA N° 1 2017-1

1. Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones, justifique su respuesta:

(a) Si A y B son matrices cuadradas de orden n tal que $AB = BA$, entonces

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

SOLUCIÓN: VERDADERO ya que

$$\begin{aligned} (A + B)^2 &= (A + B)(A + B) \\ &= A^2 + AB + BA + B^2 \quad \text{y como } AB = BA \quad \text{tenemos que} \\ &= A^2 + 2AB + B^2 \end{aligned}$$

5 puntos

(b) Ninguna matriz $A_{3 \times 3}$ satisface la relación $|A| + |A^t| = 0$

SOLUCIÓN: FALSO ya que la matriz nula de orden 3, cumple la relación.

5 puntos

(c) Si A satisface la relación $A^2 - 2A + I = 0$, entonces $A^3 = 3A - 2I$

SOLUCIÓN: VERDADERO

$$\begin{aligned} A^2 - 2A + I = 0 &= A^3 - 2A^2 + A = 0 \quad \text{y como } A^2 = 2A - I \quad \text{tenemos que} \\ &= A^3 - 2(2A - I) + A = 0 \\ &= A^3 = 3A - 2I \end{aligned}$$

5 puntos

2. Sea $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ tal que $|A| = -2$, calcule, justificando su respuesta

SOLUCIÓN:

(a) $|3A| = 3^4 \cdot (-2) = -162$

4 puntos

(b) $|-A^{-1}| = (-1)^4 \cdot \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{2}$

4 puntos

(c) $|A \cdot A^t| = |A| \cdot |A^t| = |A|^2 = 4$

4 puntos

3. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+\lambda & -\lambda \\ 1 & \lambda & 1+\lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\lambda \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$$

(a) ¿Para que valores de λ , A es invertible?.

SOLUCIÓN: Como $|A| = 2\lambda^2 - 2\lambda$, entonces A es invertible $\forall \lambda \neq 0, 1$

5 puntos

(b) Encontrar A^{-1} para $\lambda = 2$.

SOLUCIÓN: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 13/4 & -2 & -1/4 \\ -5/4 & 1 & 1/4 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

5 puntos

(c) ¿Para que valores de λ , el sistema $AX = B$ tiene infinitas soluciones?. Mostrar dos soluciones distintas.

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+\lambda & -\lambda & 2\lambda \\ 1 & \lambda & 1+\lambda & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[E_{13}(-1)]{E_{12}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 2\lambda-2 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda+2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{23}(-1)} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 2\lambda-2 \\ 0 & -1 & 2\lambda+1 & 1-2\lambda \end{array} \right) \xrightarrow{E_{23}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2\lambda+1 & 1-2\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 2\lambda-2 \end{array} \right) \xrightarrow{E_{23}(\lambda-1)} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2\lambda+1 & 1-2\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda(\lambda-1) & -(2\lambda-3)(\lambda-1) \end{array} \right) \end{aligned}$$

Claramente el sistema tiene infinitas soluciones para $\lambda = 1$.

4 puntos

Ahora si $\lambda = 1$ tenemos que la matriz aumentada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Así $(x, y, z) = (-5z, 3z+1, z)$ con $z \in \mathbb{R}$, por lo que dos soluciones distintas serían: $(0, 1, 0)$ y $(-5, 4, 1)$

4 puntos

4. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Encontrar explícitamente $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en la siguiente ecuación:

$$(AX^t - (A^t)^{-1})^t + (AB^{-1})^{-1} - \text{tr}(B)XA^t = |A|BA^{-1}$$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} (AX^t - (A^t)^{-1})^t + (AB^{-1})^{-1} - \text{tr}(B)XA^t &= |A|BA^{-1} \\ XA^t - A^{-1} + BA^{-1} - 2XA^t &= -BA^{-1} \\ -XA^t &= -2BA^{-1} + A^{-1} \\ XA^t &= 2BA^{-1} - A^{-1} \\ X &= (2BA^{-1} - A^{-1})(A^t)^{-1} \end{aligned}$$

8 puntos

Como $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ se tiene que

$$X = \left[2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 13 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

7 puntos